Trigonometria — formulario completo + esercizi guidati

Massimo livello liceo: formule operative, archi associati, somma/differenza, duplicazione, bisezione, prostaferesi e Werner.

Obiettivo: avere in poche pagine le formule che servono davvero e 9 esercizi strutturati per lasciare un metodo, non solo un risultato.

Identità fondamentali

Relazione pitagorica	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
Definizione di tangente	$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}, \quad \cos x \neq 0$
Definizione di cotangente	$\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{1}{\tan x}, \quad \sin x \neq 0$
Relazione con la tangente	$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
Relazione con la cotangente	$1 + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$
Parità	$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \tan(-x) = -\tan x$
Periodicità	$\sin(x+2\pi) = \sin x, \ \ \cos(x+2\pi) = \cos x, \ \ \tan(x+\pi) = \tan x, \ \ \cot(x+\pi) = \cot x$

Archi associati e riduzione al primo quadrante

Angolo	sin	cos	tan
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\tan\alpha$
$\pi-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\tan\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\tan\alpha$
$2\pi-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\tan\alpha$
$\dfrac{\pi}{2}-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\cot\alpha$
$\dfrac{\pi}{2}+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cot\alpha$

Regola mentale utile. Per seno e coseno, prima capisci *il quadrante* (quindi il segno), poi riduci all'angolo di riferimento. Per tangente e cotangente ricorda che hanno periodo π.

Formule di somma e differenza

Seno	$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
Coseno	$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
Tangente	$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$
Cotangente	$\cot(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\cot\alpha\,\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$

Due frasi da ricordare.
Il seno mescola: compaiono sia seno sia coseno.
Il coseno non mescola: compaiono $\cos\cos$ e $\sin\sin$.

Duplicazione e bisezione

Duplicazione

Seno	$\sin 2x = 2\sin x\cos x$
Coseno (forma 1)	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
Coseno (forma 2)	$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$
Coseno (forma 3)	$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
Tangente	$\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

Bisezione

Seno dell'angolo metà	$\sin\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$
Coseno dell'angolo metà	$\cos\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$
Tangente dell'angolo metà	$\tan\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

Attenzione al segno $\pm$. Nelle formule di bisezione il segno di seno e coseno di $x/2$ dipende dal quadrante in cui cade l'angolo $x/2$.

Werner e prostaferesi

Formule di Werner (somma $\to$ prodotto)

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Formule di prostaferesi (prodotto → somma)

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\sin\beta &= \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}\\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}\\
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}\\
\cos\alpha\sin\beta &= \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}
\end{aligned}$$

Formule che vale la pena riconoscere al volo

- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$
- $\sin(x+\pi)=-\sin x$
- $\cos(x+\pi)=-\cos x$
- $\tan(x+\pi)=\tan x$
- $\sin(\pi-x)=\sin x$
- $\cos(\pi-x)=-\cos x$
- $\tan(\pi-x)=-\tan x$

9 esercizi a difficoltà crescente

Facili — per fissare struttura e riconoscimento

F1. Riduci in funzione di $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$:

$$\sin(\pi-\alpha),\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right),\quad \tan(2\pi-\alpha),\quad \sin(-\alpha).$$

F2. Dimostra, usando solo le formule di somma e differenza, che

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x,\qquad \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x.$$

F3. Semplifica l'espressione

$$\frac{\sin(x+\beta)+\sin(x-\beta)}{\cos(x+\beta)+\cos(x-\beta)}$$

indicando le condizioni di esistenza.

Medi — per usare formule in modo operativo

M4. Risolvi in $[0,2\pi)$ l'equazione

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos x.$$

M5. Verifica l'identità e specifica il dominio:

$$\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}=\tan x.$$

M6. Sapendo che $\tan\alpha=2$ e $\tan\beta=\frac{1}{3}$, calcola $\tan(\alpha+\beta)$ e discuti se può accadere che $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+k\pi$.

Difficili — per lasciare un'idea forte

D7. Partendo da somma e duplicazione, ricava la formula dell'angolo triplo:

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x.$$

D8. Risolvi in $[0, 2\pi)$:

$$\sin x + \sin 3x = 0.$$

D9. Risolvi in $[0, 2\pi)$:

$$\cos 2x = \sin x.$$

Soluzioni sintetiche

N.	Risultato / idea chiave
F1	$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$, $\tan(2\pi - \alpha) = -\tan\alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.
F2	Si applicano le formule di somma con $\beta = \frac{\pi}{2}$ usando $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ e $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.
F3	Con Werner: numeratore $= 2\sin x\cos\beta$, denominatore $= 2\cos x\cos\beta$, quindi il rapporto vale $\tan x$, con $\cos\beta \neq 0$ e $\cos x \neq 0$.
M4	$\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$; si ottiene $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ oppure $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$. In $[0, 2\pi)$: $\boxed{x = \frac{\pi}{6},\ \frac{7\pi}{6}}$.
M5	$1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$ e $\sin 2x = 2\sin x\cos x$; il rapporto diventa $\tan x$. Dominio: $\sin 2x \neq 0$, quindi $x \neq \frac{k\pi}{2}$.
M6	$\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{2 + \frac{1}{3}}{1 - 2\cdot\frac{1}{3}} = \dfrac{7/3}{1/3} = 7$. Non può essere $\frac{\pi}{2} + k\pi$ perché in quel caso la tangente non sarebbe definita.
D7	Si usa $\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x$, poi $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ e $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. Dopo la raccolta: $\boxed{\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x}$.
D8	Con Werner: $\sin x + \sin 3x = 2\sin 2x\cos x = 0$. Quindi $\sin 2x = 0$ oppure $\cos x = 0$. In $[0, 2\pi)$: $\boxed{x = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}}$.
D9	$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = \sin x \Rightarrow 1 - 2s^2 = s$ con $s = \sin x$. Si ottiene $2s^2 + s - 1 = 0$, quindi $s = \frac{1}{2}$ oppure $s = -1$. In $[0, 2\pi)$: $\boxed{x = \frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6},\ \frac{3\pi}{2}}$.

Consiglio finale. Se una formula sembra "troppa", non tentare di memorizzarla in isolamento: collegala a una famiglia. *Somma/differenza* genera *duplicazione*; *duplicazione* genera *bisezione*; *Werner e prostaferesi* sono solo modi diversi di riscrivere la stessa informazione.